



ACTES DU 14^{EME} COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DE L'ATDM

Dialogue interdisciplinaire entre mathématiques, science et technologie

Mounir DHIEB, & Imène GHEDAMSI (Eds)





ACTES DU 14^{ème} COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES DE L'ATDM

Dialogue interdisciplinaire entre mathématiques, science et technologie

Tunisie - Tunis le 26 décembre 2023

Mounir DHIEB & Imène GHEDAMSI (Eds)

Éditions ATDM
2026

2026 - Éditions ATDM : Tunis
Copyright © ATDM

ISBN 978-9909-01-563-6

Sommaire

Préambule.....	1
La nature des difficultés rencontrées au cours de la modélisation mathématique d'un phénomène physique : cas de l'intégrale de Riemann.....	5
Inen AKROUTI	
L'approche scientifique entre les mathématiques et les sciences expérimentales : lecture des programmes éducatifs algériens – niveau collège	21
Mohamed CHETITAH et Sihem KASDALI	
Le mécanisme métaphorique des algorithmes	33
Imad MAHNANE	

PRÉAMBULE

La didactique des mathématiques connaît aujourd'hui un développement soutenu, porté par l'émergence de nouvelles problématiques de recherche, l'évolution des systèmes éducatifs et le renforcement des collaborations scientifiques nationales et internationales. Dans ce contexte, l'Association Tunisienne de Didactique des Mathématiques (ATDM) poursuit, depuis sa création, une mission essentielle : contribuer à la production, à la diffusion et à la valorisation des connaissances scientifiques relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques.

À travers l'organisation régulière de colloques scientifiques, la participation à de nombreuses manifestations nationales et internationales et le soutien aux échanges entre chercheurs, enseignants, formateurs et doctorants, l'ATDM œuvre à la constitution d'une communauté scientifique dynamique, ouverte sur les défis contemporains de l'éducation mathématique. Cette volonté de fédérer les acteurs de la recherche et de favoriser le dialogue scientifique trouve aujourd'hui un prolongement naturel dans la publication des actes de ses colloques.

La présente collection, inaugurée à partir des Journées scientifiques de 2023, ne constitue pas uniquement un recueil des communications présentées lors de cette rencontre. Elle ambitionne de devenir une référence scientifique durable, témoignant de la richesse des recherches menées dans le domaine de la didactique des mathématiques, de leurs fondements théoriques, de leurs implications pour les pratiques d'enseignement et de leur ouverture vers d'autres disciplines. En offrant une visibilité pérenne aux travaux présentés, l'ATDM entend mettre à la disposition de la communauté éducative tunisienne, mais également des chercheurs de l'espace francophone et international, un ensemble de contributions susceptibles d'alimenter la réflexion scientifique et d'inspirer de nouvelles recherches.

Les actes du **14^e Colloque de Didactique des Mathématiques de l'ATDM**, organisé à Tunis le 26 décembre 2023 autour du thème « *Dialogue interdisciplinaire entre mathématiques, sciences et technologie* », illustrent pleinement cette ambition. Le choix de cette thématique traduit la conviction que les grands enjeux éducatifs contemporains nécessitent de dépasser les frontières disciplinaires afin de mieux comprendre les processus de construction des savoirs et de développer des approches d'enseignement plus intégrées.

Les contributions réunies dans ce volume offrent un panorama de recherches qui, chacune à sa manière, interroge les interactions entre les mathématiques et d'autres domaines de connaissance.

Le premier article, proposé par **Inen Akrouti**, analyse les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la modélisation mathématique d'un phénomène physique mobilisant l'intégrale de Riemann. À travers une expérimentation fondée sur la Théorie des Situations Didactiques, cette recherche met en évidence les raisonnements, les métaphores et les obstacles cognitifs qui accompagnent la construction du concept d'intégrale. Elle apporte ainsi une contribution originale à la compréhension des liens entre intuition physique, modélisation et formalisation mathématique.

Le deuxième article, signé par **Mohamed Chetitah** et **Sihem Kasdali**, propose une lecture comparative des programmes et des manuels scolaires algériens en mathématiques et en sciences expérimentales. Les auteurs examinent la place accordée à la démarche scientifique, analysent les formes d'interdisciplinarité effectivement mobilisées et mettent en lumière les conditions nécessaires à une articulation plus cohérente entre les disciplines scientifiques dans la formation des élèves.

Le troisième article, de **Imad Mahnane**, ouvre une réflexion originale sur le rôle des métaphores dans la compréhension des algorithmes. En s'intéressant aux mécanismes cognitifs qui sous-tendent leur appropriation, cette contribution éclaire les dimensions conceptuelles de la pensée algorithmique et montre combien les approches issues de la didactique peuvent enrichir les recherches situées à l'interface des mathématiques, de l'informatique et des sciences cognitives.

Par leur complémentarité, ces travaux illustrent la diversité des objets de recherche qui animent aujourd'hui la didactique des mathématiques : modélisation, interdisciplinarité, raisonnement scientifique, pensée algorithmique, conceptualisation et formation. Ils témoignent également de la vitalité des collaborations scientifiques développées par l'ATDM et de son engagement constant en faveur d'une recherche rigoureuse, ouverte sur les préoccupations des enseignants, des formateurs et des institutions éducatives.

Nous adressons nos plus vifs remerciements aux auteurs pour la qualité de leurs contributions, aux membres du comité scientifique pour leur travail d'expertise et d'évaluation, ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué à l'organisation du colloque et à la réalisation de cet ouvrage. Leur engagement collectif permet aujourd'hui d'offrir à la communauté scientifique un volume qui, nous l'espérons, favorisera la diffusion des connaissances, stimulera les échanges entre chercheurs et contribuera au développement de nouvelles perspectives de recherche en didactique des mathématiques.

Puisse ce volume constituer une source d'inspiration pour les chercheurs confirmés, les doctorants, les enseignants et tous ceux qui partagent la conviction que la recherche en didactique des mathématiques est un levier essentiel pour comprendre, renouveler et améliorer l'enseignement des mathématiques au service des générations futures.

Imène Ghedamsi
Au nom de l'ATDM

TEXTES DES CONTRIBUTIONS

Pour citer un article

Nom(s) et Prénom(s) (2026). Titre de l'article. In Dhieb, M., & Ghedamsi, I. (Eds). *Actes du 14^{ème} Colloque de Didactique des Mathématiques (ATDM, décembre 2023)*, pages. Éditions ATDM. ISBN 978-9909-01-563-6

Exemple

Akrouti, I. (2026). La nature des difficultés rencontrées au cours de la modélisation mathématique d'un phénomène physique : cas de l'intégrale de riemann. In Dhieb, M., & Ghedamsi, I. (Eds). *Actes du 14^{ème} Colloque de Didactique des Mathématiques (ATDM, décembre 2023)*, 5-20. Éditions ATDM. ISBN 978-9909-01-563-6

LA NATURE DES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES AU COURS DE LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE D'UN PHÉNOMÈNE PHYSIQUE : CAS DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN

Inen AKROUTI*

Résumé - Cet article s'intéresse aux difficultés rencontrées par des étudiants lors de la modélisation mathématique d'un phénomène physique relevant d'une problématique d'intégration. L'étude porte plus particulièrement sur la manière dont les étudiants construisent le sens des quantités différentielles dans une situation visant à introduire l'intégrale de Riemann, à partir du calcul de la force d'attraction gravitationnelle exercée par un barreau sur une masse ponctuelle.

L'analyse des interactions en classe montre que les étudiants s'appuient sur des métaphores associées aux notions de point matériel, de petite quantité et de force élémentaire pour interpréter les différentiels. Ces métaphores jouent un rôle heuristique pour faciliter l'entrée dans la procédure d'intégration, mais peuvent également constituer des obstacles lorsque les étudiants ne distinguent pas clairement les significations mathématiques et physiques des objets mobilisés.

Les résultats mettent ainsi en évidence la tension entre l'intuition physique et la formalisation mathématique dans la construction du sens de l'intégrale de Riemann.

Mots-clés : Intégrale de Riemann, différentiel, modélisation, métaphore, point matériel.

Abstract - This article focuses on the difficulties encountered by students when mathematically modelling a physical phenomenon involving integration. It examines how students construct the meaning of differential quantities in a situation designed to introduce the Riemann integral by evaluating the gravitational force of attraction exerted by a rod on a point mass.

The analysis of classroom interactions shows that students rely on metaphors associated with the notions of punctual mass, small quantity, and elementary force to interpret differentials. These metaphors play a heuristic role in facilitating students' entry into the integration procedure, but they may also constitute obstacles when students do not clearly distinguish between the mathematical and physical meanings of the objects involved.

The results thus highlight the tension between physical intuition and mathematical formalization in the construction of the meaning of the Riemann integral.

Keywords: Riemann integral, differential, modelling, metaphor, punctual mass.

* Laboratoire Langue, Discours et Culture LDC, Université de Jendouba – Tunisie – inenakrouti@issj.u-jendouba.tn / CIREL, Université de Lille – France

I. INTRODUCTION

La notion d'intégrale nous paraît particulièrement importante pour les étudiants, vu ses nombreux moments d'application aussi bien en mathématiques, dans des cours ultérieurs, que dans des domaines scientifiques voisins (Akrouti, 2021, 2022, 2023). En effet, des recherches antérieures sur ce même sujet (Orton, 1983 ; Hu et Rebello, 2013) soulignent que les étudiants sont plus performants lors du calcul d'intégrales en contexte mathématique que dans un contexte physique. Dans ce dernier contexte, le recours à l'intégration nécessite une maîtrise par les étudiants de l'intégrale en termes de sommes de Riemann, ainsi que des termes de structure des produits où l'un des facteurs est une quantité infinitésimale. Cette caractérisation en structure de produits permet d'exprimer les relations entre les grandeurs, en particulier en physique, qui constituent la structure du phénomène physique proposée, notamment le différentiel dx . Par exemple, pour comprendre la signification de l'expression $dF = \frac{K}{r^2} dr$ relative à la troisième loi de Newton, les étudiants devraient comprendre la signification de certains symboles, en l'occurrence dF et dr . Dans le cadre de ce travail, l'analyse porte principalement sur le raisonnement des étudiants autour de la notion de différentiel dans les équations de physique lors de la mise en place d'une intégrale.

Moreno-Armella (2014) souligne que la définition formelle devrait être élaborée à partir des intuitions des étudiants, afin qu'elle ne soit pas perçue comme déconnectée de leurs expériences personnelles. Les interactions entre l'intuition et la formalisation s'approfondissent au fur et à mesure que les connaissances des étudiants se développent. La définition formelle suppose, en principe, que tout le monde soit d'accord et uni autour d'un même point de vue. Mais se contenter de cela nous fait oublier que les couples enseignant/étudiant et même étudiant/étudiant ne disposent pas des mêmes connaissances. Par ailleurs, pour comprendre les phénomènes physiques, les étudiants mobilisent une forme de connaissance intuitive issue de leur interaction avec le monde réel. Ce sens intuitif peut être mobilisé directement dans la résolution d'un problème ; toutefois, lorsqu'il est appliqué de manière inappropriée ou insuffisamment rigoureuse, il peut susciter chez les étudiants des conflits cognitifs susceptibles de constituer des obstacles à la construction des connaissances formelles en physique et en mathématiques.

Dans le cadre de ce travail, nous envisageons d'étudier les métaphores mobilisées par les étudiants lorsqu'il s'agit de quantités différentielles en mathématiques. Notre ambition est de répondre à la question du rôle de ces métaphores dans la conceptualisation du savoir visé.

II. CADRAGE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIQUE

Pour aborder notre problématique, nous avons choisi d'inscrire notre analyse dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), mobilisée ici comme cadre conceptuel de référence. Ce choix se justifie par l'intérêt de cette théorie pour analyser les conditions dans lesquelles un savoir peut émerger à partir de l'activité des étudiants, sans être immédiatement réduit à une transmission directe par l'enseignant. La TSD permet en effet de penser l'apprentissage comme le résultat d'interactions entre un sujet apprenant, un problème à résoudre, un ensemble de contraintes et de ressources, ainsi qu'un milieu susceptible de

produire des rétroactions. Dans cette perspective, les situations adidactiques, ou à potentialité adidactique, occupent une place centrale. Elles désignent des situations où les étudiants prennent en charge une part significative de l'activité mathématique. Cette prise en charge les conduit à formuler des stratégies, à éprouver la pertinence de leurs raisonnements et à ajuster leurs actions en fonction des rétroactions du milieu.

La structuration du milieu permet de distinguer les formes d'engagement des étudiants dans la situation, les responsabilités qui leur sont effectivement confiées, ainsi que les médiations par lesquelles l'enseignant soutient, oriente ou institutionnalise les savoirs en jeu (Margolinas, 1998 ; Bloch, 2000). Dans notre étude, cette structuration est mobilisée pour analyser la manière dont les étudiants construisent, transforment ou stabilisent leurs raisonnements lorsqu'ils sont confrontés à des situations impliquant la notion de différentiel dans les équations de physique et la mise en place d'une intégrale. Les situations proposées dans le cadre de la TSD se caractérisent par un système de relations entre étudiants, enseignant et milieu mathématique. L'activité des étudiants peut alors être analysée en trois phases principales.

La première est la phase d'action (M-2). À ce niveau, les connaissances apparaissent d'abord comme des moyens d'action. Les étudiants s'engagent dans la résolution de la situation en mobilisant des procédures, des intuitions, des représentations ou des modèles qui peuvent demeurer largement implicites. Le savoir n'est pas nécessairement formulé sous une forme explicite ni organisé dans un langage stabilisé. Les actions produites traduisent cependant une première forme de rapport au problème : elles révèlent ce que les étudiants considèrent comme pertinent, les grandeurs qu'ils identifient, les relations qu'ils établissent et les choix qu'ils opèrent pour avancer dans la situation.

La deuxième est la phase de formulation (M-1). À ce stade, les connaissances commencent à se développer à travers la construction d'un langage permettant de décrire, d'explicitier et de partager les stratégies mises en œuvre. Les étudiants sont conduits à mettre en mots leurs raisonnements, à expliciter les relations qu'ils établissent entre les grandeurs, à justifier leurs choix et à confronter leurs démarches à celles des autres. Cette phase est particulièrement importante, car elle marque le passage d'une connaissance principalement engagée dans l'action à une connaissance susceptible d'être communiquée, discutée et progressivement stabilisée.

La troisième est la phase de validation (M0). Elle correspond au moment où les raisonnements produits sont soumis à des critères de cohérence, de généralité et de validité. Le savoir ne relève plus seulement d'une stratégie locale de résolution ; il s'inscrit dans un ensemble de connaissances reconnues, articulées à des règles, des propriétés ou des théorèmes institutionnellement admis. Dans cette phase, les étudiants sont amenés à justifier la validité de leurs démarches, à identifier les conditions dans lesquelles elles peuvent être retenues et à distinguer ce qui relève d'une intuition opératoire de ce qui peut être intégré à une construction formelle du savoir. La validation joue ainsi un rôle fondamental dans le passage d'un raisonnement contextualisé à une connaissance mathématique ou physique plus structurée.

Dans le cadre de notre recherche, la TSD permet de comprendre comment se construisent les significations associées au différentiel et comment les étudiants articulent l'intuition physique avec la formalisation mathématique. Elle permet également d'identifier les difficultés

susceptibles d'apparaître lorsque le passage entre ces différents registres n'est pas suffisamment articulé. La TSD constitue également un cadre favorable à l'analyse des raisonnements des étudiants dans des situations d'apprentissage réelles. Bloch et Gibel (2011) se sont appuyés sur le modèle de structuration du milieu pour élaborer un cadre d'analyse des raisonnements. Gibel (2018) précise que c'est au niveau de l'articulation entre le milieu heuristique et le milieu de référence qu'apparaît et se développe le raisonnement attendu.

Bloch et Gibel se sont appuyés sur les trois catégories de la sémiotique de Peirce pour mettre en œuvre ce modèle : les icônes, les indices et les symboles-arguments. Une icône est un signe qui renvoie à son objet lorsqu'elle ressemble à un objet. Elle interprète une action de l'étudiant confronté à la situation. Lecorre (2016) précise qu'en mathématiques, les icônes sont des signes qui évoquent immédiatement, pour le mathématicien, une théorie sans avoir besoin de la revisiter : par exemple, le symbole « $\int$ », « intégrale », renvoie à la théorie de la mesure ». Selon Otte (2006), un indice incorpore une icône et pointe l'objet sans qu'il ne soit l'objet lui-même. Par exemple, l'aire sous la courbe est un indice de l'intégrale. Les icônes et les indices sont des signes non symboliques qui représentent l'étape intuitive du développement d'un raisonnement mathématique. Les symboles-arguments désignent des signes qui renvoient à l'objet au moyen de règles ou de lois auxquelles celui-ci est soumis. En mathématiques, ils peuvent correspondre à un calcul permettant d'établir la validité d'une assertion. Un symbole-argument est assimilé à une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique. Le modèle d'analyse des raisonnements a été enrichi par Lalaude-Labayle (2016) dans le cadre de l'algèbre linéaire. Le modèle initial de Bloch et Gibel (2011) constitue le socle de celui proposé par Lalaude-Labayle pour l'analyse des raisonnements au niveau de l'enseignement supérieur, lequel intègre une quatrième ligne consacrée aux types de raisonnement. Ce nouveau socle suppose, conformément à la considération de Peirce, que tout raisonnement prend nécessairement l'une des formes suivantes : l'abduction, l'induction et la déduction.

Pour accompagner le passage d'un raisonnement intuitif à un raisonnement formel, il convient d'adopter une approche didactique permettant aux étudiants d'attribuer du sens à leurs énoncés ainsi qu'aux preuves formelles qui les sous-tendent. Une telle approche suppose de relier ces énoncés à d'autres formes de discours susceptibles de mobiliser l'intuition, l'expérience personnelle et les modes de raisonnement propres aux étudiants. Dans cette perspective, Lecorre (2016) distingue trois types de rationalités pour comprendre le processus d'apprentissage d'un concept mathématique. La première est la rationalité pragmatique, dans laquelle la validation repose sur une vérification concrète de l'action ou du résultat obtenu. La deuxième est la rationalité empirique, où la validation s'appuie sur l'induction, à partir de régularités observées ou de cas particuliers. La troisième est la rationalité théorique, dans laquelle la validation repose sur la preuve et prend la forme d'une démonstration. En s'appuyant sur cette réflexion, Akrouti (2022) a adapté un modèle intégrant ces différents types de rationalité. Ce modèle est présenté dans le tableau suivant :

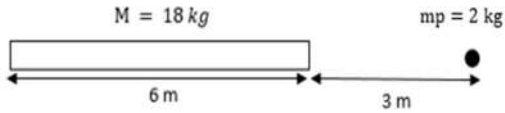
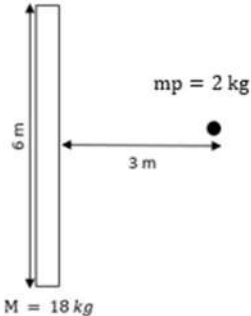
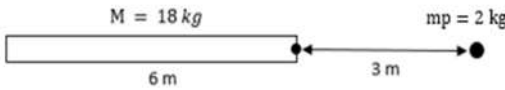
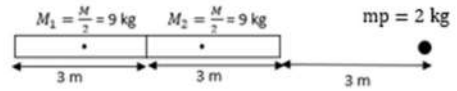
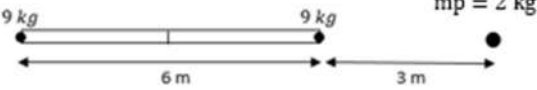
Tableau 1 - Le modèle d'analyse adapté par Akrouti (2022, pp. 85 – 86)

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Choix du contexte (physique, mathématique). - Décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique), de conversion entre registres. - Décision de choisir une conception particulière (primitive, mesure d'une grandeur pour le contexte mathématique et la mise en équation pour le contexte physique). - Décision de calcul. - Moyen heuristique. - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple.	R1.2 SYN/SEM - Calculs génériques. - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique.	R1.3 SYN En lien avec l'enseignant : - Organiser les signes pour obtenir un objet calculable. - Formulation et certification de validations, de preuves. - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise.
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuition), (procédure simple, modèle ponctuel $f(x) \times x \dots$).	R2.2 SYNT/SEM Arguments locaux, génériques, opératoires : indices, calculs, modèle local $f(x_i) \times \Delta x$.	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques du domaine mathématique de la situation, modèle global $f(x_i) \times dx$.
Usage et actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes. - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, connaissances ponctuelles (modèle de base, raisonnement ponctuel).	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés ; - du système organisateur (modèle local, raisonnement covariationnel simple).	R3.3 SYNT - Formulation des preuves. - Introduction d'ostensifs organisés. - Intégrations des éléments théoriques du domaine mathématique (raisonnement covariationnel complexe).

Forme de raisonnement	R4.1 FORMES Déductif, Inductif, Abductif	R4.2 FORMES Déductif, Inductif	R4.3 FORMES Déductif
Types de rationalité	R5.1 Pragmatique, empirique, théorique	R5.2 Empirique, théorique	R5.3 Théorique

Pour répondre à la question que nous nous sommes posée, nous avons proposé, en février 2020, une situation à un groupe d'étudiants âgés de 19 à 20 ans. Cette situation consiste à déterminer la valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée par un barreau de longueur 6 m sur une masse ponctuelle de 2 kg située dans son prolongement, à une distance de 3 m. Dans cette expérimentation, nous nous sommes adressés à dix-huit étudiants inscrits en première année préparatoire de la filière Maths-physique (MP) à l'IPEIT (Institut National Préparatoire aux Écoles d'Ingénieurs de Tunis). Le problème a été proposé pour la première fois par Legrand et son équipe à l'université de Lyon en 1985 comme une Situation Fondamentale (SF) pour l'introduction de l'intégrale de Riemann. L'objectif de la situation est de mettre les étudiants face à un problème dont la résolution nécessite de recourir à un processus d'approximation des produits infinitésimaux. La valeur de l'intensité du phénomène physique à l'origine du problème proposé ne peut être obtenue qu'à l'issue d'une intégration. Notre ambition est d'amener les étudiants à mettre en œuvre un processus d'approximation qui fait progressivement émerger la structure sous-jacente de l'intégrale de Riemann. La situation est connue sous le nom de « la situation du barreau » :

Tableau 2 - La situation du barreau

Situation A_1 : Connaissant la loi d'attraction de deux masses ponctuelles m_p et M : $F = G \frac{M m_p}{r^2}$. Déterminer la force F d'attraction entre la masse ponctuelle m_p de 2 kg et le barreau de 6 m de longueur et de masse $M = 18$ kg dans la position suivante : 	Situation A_2 : Calculer la valeur de F dans cette position 
Situation A_3 : Si on concentre la masse à l'extrémité droite du barreau, puis à son extrémité gauche. Quelle sera la valeur de la force F dans chaque cas ? 	Situation A_4 : Cette situation se compose de deux étapes : On découpe le barreau en deux et on concentre la masse au centre de gravité de chaque morceau.  On découpe le barreau en deux et on concentre la masse du premier morceau à son extrémité gauche et la masse du deuxième morceau à son extrémité droite. 
Situation A_5 : Ensuite on découpe le barreau en quatre, en six et en huit morceaux égaux.	

* M : la masse totale du barreau et m_p : la masse ponctuelle.

III. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

1. Analyse a priori

La situation se compose de trois phases, chacune correspondant à une étape de développement de la structure sous-jacente de l'intégrale. La première est issue du produit de $f(x_i)$ par Δx : lorsque cette situation sera proposée à des étudiants où rien n'indique que la notion d'intégrale est appelée, la première réaction attendue des étudiants est que ces derniers remplacent le barreau par son centre de gravité, situé en son milieu, en y concentrant toute sa masse. La validité des conjectures repose sur ce principe. Dans cette phase, le problème est inscrit dans un contexte physique qui confère du sens aux raisonnements mobilisés. La procédure du « simple produit » fonctionne alors comme une icône, tandis que le schéma joue le rôle d'indice. Cette visualisation de la force recherchée permet d'anticiper la tâche et de calculer son intensité. Le recours au centre de gravité constitue une mobilisation ponctuelle de connaissances

anciennes fondées sur la procédure du simple produit. La validation repose sur des cas concrets mobilisant une rationalité pragmatique. Ainsi, le raisonnement prend la forme abductive. La difficulté attendue tient au caractère variable de la distance séparant le point d'application de la force d'attraction de la masse ponctuelle. Nous nous attendons à ce que la majorité des étudiants ne parviennent pas à concevoir la distance comme une variable, ce qui pourrait les conduire à mobiliser le principe du centre de gravité. L'enseignant devrait introduire de nouveaux éléments afin d'accompagner la progression des étudiants dans le milieu, de permettre le passage au niveau M-2 et de leur demander de calculer la force d'attraction après le découpage du barreau en deux. Par la suite, les étudiants constatent que la force obtenue après ce découpage ne correspond pas à la force initiale, ce qui contredit le principe du centre de gravité. Il s'agit d'une rationalité empirique qui repose sur la réfutation de l'assertion et mobilise un raisonnement déductif. En fait, les étudiants produisent deux types d'action (Gibel, 2018) : l'un sur l'objet, qui se manifeste dans les conjectures qu'un étudiant va étayer sur la valeur de la force d'attraction, et l'autre sur les conditions de l'action, qui consiste en une réflexion sur la validité de ses choix pour la résolution du problème proposé, ce qui demande qu'il produise des éléments de réfutation de ses conjectures. À la fin de cette phase, les étudiants devraient comprendre comment le produit $f(x_i)\Delta x$ est formé, et comment chaque facteur au sein du produit va fonctionner.

La deuxième phase porte sur la mise en œuvre de la somme : dès que les étudiants sont convaincus qu'il ne s'agit pas de la règle du centre de gravité, ils sont confrontés à un blocage. La première phase permet d'établir la première étape de la procédure intégrale : $f(x) \times dx$. Or, cette formule ne s'applique qu'aux situations où les deux facteurs de la relation multiplicative sont constants. Cela revient implicitement à décomposer le problème en différentes partitions, puis à appliquer cette formule localement, pour enfin calculer la somme correspondante à chaque étape. Bien que les étudiants de l'étude ne l'aient jamais explicitement exprimé, cela a été implicitement reconnu par leur confort avec l'idée de décomposer les problèmes en différentes partitions puis d'obtenir les sommes. Pour la distance, il aurait dû être évident aux étudiants que la distance totale était la somme de toutes les parties élémentaires. La nouvelle consigne pourrait partir de la construction d'une fonction F de la manière suivante : $F_i : r_i \rightarrow \text{MmpG} \frac{1}{r_i^2}$ et $F = \sum_{i=1}^n F_i$ avec r_i est la mesure de la longueur du sous-intervalle découpé.

La troisième phase consiste à effectuer un passage à la limite. Après la mise en place de la procédure de somme, cette phase vise à amener les étudiants à encadrer la force d'attraction F par deux suites adjacentes qui convergent vers la même limite. Pour ce faire, il s'agit d'abord de mettre à la disposition des étudiants les éléments nécessaires leur permettant de calculer ces termes de manière simple et rapide. Il convient ensuite de les amener à prendre conscience de l'efficacité des sommes construites pour encadrer la valeur de la force d'attraction entre une somme inférieure et une somme supérieure, en considérant la distance r , qui sépare le barreau de la masse ponctuelle, aussi petite que souhaitée. Les étudiants découpent le barreau en deux et reprennent l'encadrement précédent sur chacune des deux parties. L'encadrement se rapproche alors de la valeur de la fonction en fonction du nombre de découpages, ce qui met en œuvre un raisonnement inductif mobilisant une rationalité empirique. L'idée est maintenant de

montrer que plus le nombre de découpages augmente, plus les longueurs des sous-intervalles obtenus diminuent et plus l'écart entre le majorant supérieur M_i et le majorant inférieur m_i diminue. Ainsi, les deux quantités se rapprochent de la valeur de la force. Il suffit alors d'itérer le processus pour obtenir un découpage en quatre, en six et en huit. Les étudiants obtiennent des encadrements de plus en plus fins autour de la valeur de F .

À la fin de cette phase, l'enseignant doit amener les étudiants à se détacher du contexte physique initial en généralisant la procédure mise en œuvre. Il montre aux étudiants que cette procédure est susceptible de s'appliquer à n'importe quelle fonction sur n'importe quel ensemble, au niveau de leurs connaissances. Il s'agit de la formulation des preuves, de l'introduction de l'ostensif du domaine mathématique, tel que $\sum$, $\int$, ou de la notion de limite... Les arguments sont formels, la forme du raisonnement est déductive et mobilise une rationalité théorique.

2. *Analyse a posteriori*

La situation a été « productive » en engageant les étudiants à la fois dans la structure mathématique de l'intégrale définie et dans sa modélisation fondée sur un contexte physique. L'interprétation de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ en termes de somme de Riemann se focalise sur la sommation de nombreux termes obtenus par une relation multiplicative entre la fonction à intégrer $f(x)$ et une petite quantité Δx . La composition de la structure de l'intégrale selon cette approche avait le potentiel d'approfondir la compréhension des étudiants de la signification des différentiels, des intégrales définies et, dans une certaine mesure, de la somme de Riemann, au-delà de ce qui a été abordé dans l'approche d'enseignement usuelle. Cependant, la signification du différentiel dx a été un peu ambiguë. En fait, le dx pourrait être interprété de plusieurs manières. La perspective ici, qui est cohérente avec les applications en physique et dans d'autres domaines, est que dx soit défini comme un changement infinitésimal de la quantité x , semblable à la limite du changement de x pour les produits dans une somme de Riemann : $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; $dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n}$. Le différentiel représente ainsi une quantité infinitésimale ou un changement infinitésimal d'une grandeur physique.

Au cours de l'expérimentation, nous avons remarqué que les étudiants possèdent des images intuitives de la quantité différentielle dx , construites sur des métaphores spécifiques qui fonctionnent comme des icônes et que ces connaissances intuitives peuvent devenir un obstacle à l'accès au niveau formel. Compte tenu des contraintes éditoriales, nous avons choisi de nous limiter à l'étude de quelques extraits des dialogues échangés en classe. Ces extraits se caractérisent par le nombre important de participants ainsi que par la richesse et la variété des débats.

Le premier extrait ci-dessous relève de la deuxième phase où il s'agit de construire la procédure de somme. Les étudiants évoquent un raisonnement qui met en œuvre la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : (R1.2), (R2.2) (Bloch et Gibel, 2011, p. 29). Il s'agit du début de l'entrée au niveau M0. C'est un raisonnement correspondant à la formulation d'une preuve.

113 Dhia : On peut considérer la tige comme si elle était un ensemble de points (masses ponctuelles). Chaque point du barreau possède une masse ponctuelle qui exerce une force sur la masse m . La force qu'on cherche est la somme des forces élémentaires exercées par chaque point du barreau sur la masse ponctuelle.

114 P : tu passes au tableau et tu nous expliques ton idée.

115 Dhia : C'est comme si on avait coupé le barreau initial en une infinité de très petits barreaux. On fait la même chose que dans la situation initiale avec chaque petit barreau : la masse est distribuée uniformément, donc chaque petit barreau possède une masse M divisée par le nombre total de barreaux.

Au début, Dhia parle de « la somme des forces élémentaires », ce qui montre qu'il se rend compte que la force totale est la somme de toutes les forces exercées sur chaque point du barreau. Un intérêt particulier de cet extrait réside dans l'émergence de deux types de phrases dans la réponse : la force à chaque point et la force ponctuelle ou élémentaire. Pour expliquer sa conception de la notion de différentielle, l'étudiant a articulé les deux phrases de manière réciproque au cours de son intervention. Ici, il semble que l'étudiant ne distingue pas clairement les deux idées exprimées dans ces phrases. Il assimile ainsi la force exercée en chaque point à l'ensemble des forces associées aux différentes positions du barreau. Ainsi, la force fonctionne comme un symbole-argument, tandis que la force élémentaire ou ponctuelle consiste à considérer une certaine quantité de barreau comme une quantité ponctuelle sans dimension physique, qui exerce une force sur la masse ponctuelle initiale. La force élémentaire agit comme un indice et la quantité ponctuelle comme une icône.

Nous avons également remarqué que les étudiants utilisent souvent les expressions « un ensemble de masse ponctuelle » et « chaque point du barreau ». Il semble que les étudiants aient lié les deux termes au différentiel dm , ce qui nous permet de dire qu'ils pensent que dm représente une masse ponctuelle. Par la suite, la masse ponctuelle agit comme une icône et la force élémentaire comme un indice. Il faut souligner qu'en physique, un objet peut souvent être considéré comme un point pour des raisons de simplicité, lorsque sa taille est négligeable par rapport à celle de l'objet de référence. Par exemple, en mécanique newtonienne, nous utilisons souvent un point pour représenter un objet et dessiner les forces qui agissent sur ce point, comme dans la loi de Newton qui modélise la force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles. Ainsi, il nous semble que les étudiants ont utilisé la notion de ponctuelle de deux manières différentes : le terme différentiel dx représente un emplacement géométrique dans l'espace, et dr représente une petite quantité du barreau avec des dimensions physiques négligeables. Or, lorsqu'ils considèrent l'objet comme composé de points, ils ne parviennent pas toujours à associer ces points aux dimensions physiques de l'objet. Toutefois, lorsqu'ils parlent de la masse en chaque point, ils semblent l'identifier à un point par le rapport entre la masse totale et la longueur totale du barreau. Ainsi, les étudiants considèrent les objets physiques comme un ensemble de points séparés, c'est-à-dire discontinus.

En mathématiques, les différentielles telles que l'ostensif dx ont la signification d'une quantité infinitésimale. Pour construire le processus permettant de concevoir ces quantités infinitésimales, les étudiants utilisent des représentations iconiques, comme ici : un point sur une ligne. Ils ont découpé le barreau en petits barreaux (icône), puis ils ont cherché la force élémentaire (indice) exercée par chaque barreau sur la masse ponctuelle. En considérant la longueur totale du barreau comme composée de très petits segments, ils ont pu construire des

rapports des termes différentiels ou infinitésimaux pour le barreau ainsi que pour la masse du barreau : $dm = \frac{M}{L}$ où L représente la longueur du barreau.

Dhia utilise des barreaux infiniment petits pour évoquer la notion de différentielle. Hu (2010) appelle cette conception celle de petites quantités. Cette métaphore permet de transformer la notion de différentielle d'un objet concret, dans le contexte initial (l'expérience physique), en quelque chose d'autre, abstrait dans le contexte mathématique.

L'extrait suivant relève de la troisième phase. Après avoir fait émerger des encadrements de plus en plus fins au niveau M-1 et vu que les discussions ont conduit à la formulation de procédures de plus en plus efficaces, l'étudiant (Marouane) a demandé à intervenir.

153 Marouane : Pourquoi on ne découpe pas la tige en neuf parties égales ? Chaque partie aura une masse de 2 kg. Elle représente un point matériel et la longueur de chaque partie est 6/9 de la longueur du barreau. Puis, on calcule la distance entre chaque partie de la tige et la masse ponctuelle m . Après, on calcule la force d'attraction de chaque partie en se basant sur le principe du centre de gravité, et on fait la somme. On trouve la valeur de F .

154 P : pourquoi précisément neuf ?

155 Marouane : Après le découpage en neuf parties, chaque partie possède une masse de 2 kg qui est supposée dès le début comme une masse ponctuelle !

156 P : Mais la masse de chaque partie du barreau n'est pas ponctuelle pour 9 !

157 Marouane : si on découpe en neuf parties, chaque morceau aura une masse de 2 kg qui est une masse ponctuelle.

158 Sana : Il a voulu la rendre égale à m_p , la masse ponctuelle !

159 Marouane : oui, par rapport à la masse m , ils ont la même masse !

Nature et fonction- Milieu	Signes et repertoire	Forme de raisonnement
M_{-2} : Décision de transformation de l'énoncé (R1.1).	Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes (R3.1).	Confusion de la conception d'un point matériel.

Le raisonnement de Marouane se réfère au milieu objectif de départ : le découpage du barreau en neuf parties ; chaque partie est considérée comme un point matériel. La justification des étapes du raisonnement doit favoriser l'utilisation des énoncés comme éléments du système organisateur (Bloch et Gibel, 2011).

Marouane pense que le découpage en neuf parties permet de rendre les parties découpées des points matériels, car la masse de chaque partie est de 2 kg. Il a construit un faux raisonnement en considérant que, puisque m_p est de 2 kg et qu'elle est ponctuelle, toute masse de 2 kg est ponctuelle ! Ceci est dû à une conception erronée de la définition d'un point matériel. En fait, un point¹ matériel est un point de l'espace physique auquel on associe une grandeur scalaire positive et mesurable, appelée masse. C'est-à-dire qu'un point matériel possède une masse mais son volume est nul. Les interventions de Marouane semblent être des tentatives « naïves », comme le définit Lecorre (2016) : « [...] les tentatives « naïves » provenant des conceptions des élèves qui trouvent dans la situation un terrain naturel d'application et doivent être

¹ "A point, as defined by Euclid, is a dimensionless entity, an entity that has only location but no extension. A point, after all, with its precision and clear identity, is an idealized abstract entity." (Nuñez, 2019, p. 342-343).

questionnées par les rétroactions du milieu. Le savoir visé doit être contenu dans la situation, comme la seule stratégie optimale de résolution accessible » (p. 142).

Nous terminons par ce dernier extrait des interactions des étudiants :

178 Marouane : Vous m'avez posé la question : pourquoi avez-vous fait le découpage en neuf parties ? Dans les première et deuxième situations, lorsqu'on a découpé en deux, les tiges ne sont pas des points matériels. Moi, j'ai fait ce choix parce que les morceaux de la tige seront assimilés à des points matériels. On aura neuf points et on fait la somme ; on trouve la valeur exacte.

179 Sana : Réellement, lorsqu'on découpe en 9, on va avoir la même masse que la masse ponctuelle. Physiquement, il voit que le découpage est très petit et chaque partie s'approche d'un point matériel, mais mathématiquement, ce n'est pas le cas. Plus on découpe, plus on se rapproche de la valeur réelle.

180 Marouane : Par le découpage en neuf, on va rendre les parties des points matériels et on va faire des calculs exacts !

Nature et fonction-Milieu	Signes et repertoire	Forme de Raisonnement
M_{-2}: Retour vers le milieu M_{-2}. Moyen heuristique : Sana essaie d'expliquer le raisonnement de son collègue (R1.1).	Marouane prend des décisions à partir du milieu matériel : la masse du barreau, qui est neuf fois plus grande que la masse ponctuelle, représente une icône ou un indice dépendant du contexte (R2.1). Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes qui ne sont pas dans leur contexte, ce qui produit un raisonnement erroné (R3.1). Sana essaie d'expliquer la justification de son camarade en se basant sur la différence entre les contextes mathématiques et physiques. Elle considère que les arguments de nature physique ne s'appliquent pas aux « mathématiques ». Chaque contexte possède ses arguments spécifiques qui ne sont pas valides dans l'autre contexte : explications et justifications visant à définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages (R1.3).	Argumentation pragmatique / raisonnement déductif.

L'idée avancée par Marouane réapparaît une nouvelle fois. Elle traduit un conflit cognitif lié à des connaissances physiques, susceptible de poser ultérieurement un obstacle épistémologique. Selon Sierpiska (1987), « un obstacle est lié à une conviction profonde, à un sentiment d'une vérité évidente, au sentiment que ce qu'on sait sur une question fondamentale est le seul savoir possible » (p. 73 ; cité dans Lecorre, 2016, p. 154). Ici, lorsqu'on demande à un étudiant de réfléchir à la définition formelle, on s'aperçoit que ses images intuitives deviennent des obstacles. Du point de vue de la rationalité mobilisée, il s'agit de la rationalité empirique qui possède un ordre de vérité limité. Cette rationalité est valide sous certaines conditions, mais elle ne se généralise pas.

En fait, Marouane a mobilisé « de petits morceaux » et « des tiges assimilées à des points matériels » pour parler des quantités différentielles. Outre les explications verbales, il a utilisé

des gestes pour montrer une petite dissection de la ligne, en faisant un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau. Les étudiants construisent la notion abstraite de différentielle à partir d'objets concrets, tels qu'une petite portion d'une quantité. Ce geste, utilisé par l'étudiant, agit comme une icône et constitue un autre type de métaphore fondée sur les gestes du corps. Il faut dire que cette métaphore (icône) est souvent invoquée lorsqu'il s'agit d'un recours à une petite quantité qui fait partie d'un ensemble plus grand. Elle permet aux étudiants d'associer les notions mathématiques complexes à des connaissances expérimentales sur des objets physiques. En effet, la notion de point matériel renvoie à deux significations distinctes. Dans le contexte mathématique, elle renvoie à un emplacement dans l'espace ; dans le contexte physique, elle désigne une quantité ponctuelle dont les dimensions physiques sont considérées comme négligeables. Cependant, les étudiants semblent ignorer cette distinction.

Notre analyse du travail des étudiants souligne que la notion de « point », considérée comme un emplacement dans l'espace, est intégrée à leur raisonnement sur la signification de la quantité différentielle. Cette même notion, considérée comme des quantités infiniment petites, est associée à des termes différentiels tels que le dr .

Les échanges en classe portent principalement sur la recherche de meilleures approximations pour se rapprocher de la valeur exacte de la force d'attraction, plutôt que sur sa détermination directe. L'augmentation du nombre de découpages est un exemple de réflexion sur la limite en termes de meilleures approximations, même si l'on ne calcule pas sa valeur exacte. Autrement dit, lorsque les étudiants discutent entre eux du moyen d'obtenir une bonne approximation du problème proposé. Ils sont réellement en train de mettre en place progressivement la procédure d'intégration. Ce travail montre qu'en général, les étudiants examinés ont compris la définition formelle de l'intégrale et que, dans quelques cas, il existe un écart entre cette définition et les images intuitives qu'ils se construisent.

IV. CONCLUSION

L'analyse des données que nous avons recueillies montre que de nombreux étudiants ont recouru à des approximations. Cependant, quelques-uns d'entre eux n'ont pas pu dépasser la phase intuitive de leur raisonnement, qui se concentre sur la masse de chaque barreau découpé et sur la manière dont celle-ci peut se rapporter à une masse ponctuelle. Ils ne se sont pas concentrés sur la distance, fil conducteur de tout ce qui se passe, car elle n'est pas constante. En fait, à chaque point du barreau correspond une distance particulière. Dans ce même ordre d'idées, l'un des étudiants, Marouane, indique qu'il pourrait « prendre des masses plus petites » afin d'obtenir une approximation plus précise. Il associe ainsi la précision du résultat à la valeur de la masse considérée, plutôt qu'à la variation de la distance propre à chaque masse élémentaire. Cependant, il faut dire que, même si son raisonnement n'était peut-être pas valide, il évoque la nécessité de recourir à des approximations. Sana, à son tour, pense que « *la force devient plus grande lorsqu'on se rapproche de la masse mp* ».

Notre analyse des interactions des étudiants révèle également que ces derniers ont rencontré des difficultés lorsqu'ils se sont limités à un raisonnement intuitif sans chercher à l'approfondir : ils restent dans le milieu heuristique (le cas de Marouane). La métaphore

mobilisée par les étudiants pour appréhender les quantités différentielles relatives à la distance repose sur l'idée qu'un point matériel possède une taille physique nulle, tout en étant doté d'une masse. En fait, ils considèrent le barreau et la distance qui le sépare de la masse ponctuelle comme un ensemble de points consécutifs lors de l'intégration. Mathématiquement, la notion de différentielle a deux aspects : soit un objet représentant une quantité infinitésimale, soit un opérateur mathématique permettant de dériver une fonction par rapport à une variable. Ce double aspect ne figure pas dans le raisonnement des étudiants.

Notre étude a examiné le processus de raisonnement mobilisé par les étudiants pour résoudre des problèmes de physique relevant d'une problématique d'intégration, ainsi que les métaphores qu'ils mettent en œuvre, qui s'orientent souvent vers l'idée de grandeur infinitésimale. Ces métaphores ont permis aux étudiants d'associer les notions mathématiques complexes à leurs connaissances expérimentales sur les objets physiques. La notion de quantité ponctuelle comporte deux significations distinctes : l'une désigne des emplacements dans l'espace, tandis que l'autre renvoie à une quantité de taille physique négligeable. Les résultats obtenus montrent que les étudiants ne semblent pas conscients de cette distinction.

REFERENCES

- Akrouti, I. (2021), Que représente le concept d'intégrale définie chez les étudiants à l'entrée à l'université ? Que représente le concept d'intégrale définie pour les étudiants à l'entrée à l'université ? *Web of Conferences*, 39 (01010). eISSN: 2271-2097 <https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901010>.
- Akrouti, I. (2022). La situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, 72-110. <https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/55>
- Akrouti, I. (2023). La modélisation mathématique d'un phénomène physique : une approche expérimentale possible pour l'enseignement de l'intégrale. Dans A. C. Adihou et F. Chellougui (dir.), *Actes du troisième colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA 3) : Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quels projets et quels enjeux pour l'Afrique ?* 140 - 149.
- Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
- Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. [Thèse, Université Bordeaux I].
- Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat de l'Université Lyon 1 – Claude Bernard, France.
- Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39, IREM de Strasbourg.
- Gibel, P. (2018). Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. *Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour*. Available on: <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188>.
- Hu, D. (2010). *Understanding introductory students' application of integrals in physics from multiple perspectives*. Dissertation of the KANSAS STATE UNIVERSITY Manhattan, Kansas.
- Hu, D. et Rebello, N. S, (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *PHYSICAL REVIEW SPECIAL TOPICS - PHYSICS EDUCATION RESEARCH* 9, 020108 (2013), 1-14, Published by the American Physical Society; 10.1103/PhysRevSTPER.9.020108.
- Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre au niveau universitaire. Etude épistémologique et didactique*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Lecorre, T. (2016). *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la notion de limite*. Thèse de l'Université Grenoble Alpes.
- Margolinas, C. (1998). Étude de situations didactiques ordinaires à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*.

- Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46, 621-633. DOI 10.1007/s11858-014-0580-4.
- Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotical point of view. *Revista Latino-Americana de Matematica Educativa Numero especial*, 23-43: www.clame.org.mx/relime.htm
- Orton, A. (1983a). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Yeatts, F. R., & Hundhausen, J. R. (1992). Calculus and physics: Challenges at the interface. *American Journal of Physics*, 60(8), 716-721.

L'APPROCHE SCIENTIFIQUE ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES EXPÉRIMENTALES : LECURE DES PROGRAMMES ÉDUCATIFS ALGÉRIENS – NIVEAU COLLÈGE

Mohamed CHETITAH* - Sihem KASDALI**

Résumé - Cet article décrit et analyse les moyens et les stratégies prévues par les programmes algériens pour développer la démarche scientifique chez l'élève du collège. L'objectif est double, d'une part recenser toutes les situations problèmes proposées dans les manuels scolaires en mathématiques et des sciences expérimentales et d'autre part, analyser l'efficacité d'usage de la démarche scientifique.

La méthodologie repose sur une analyse des programmes des mathématiques et des sciences expérimentales, des manuels en se basant sur une grille qui identifie les dimensions de la démarche scientifique. Les résultats obtenus attestent d'une mise en œuvre d'une telle démarche pour l'enseignement des mathématiques qui reste en dessous des espérances attendues. Une interdisciplinarité instrumentée avec une formation des formateurs en conséquence prenant en compte les défis sociétaux actuels et futurs seraient les leviers d'une démarche scientifique efficace.

Mots-clés : Démarche scientifique, mathématiques, sciences expérimentales, interdisciplinarité.

* Ecole Normale Supérieure El Bachir El Ibrahimi – Kouba – Alger–Algérie. Email : mohamed.chetitah@g.ens-kouba.dz

** Ecole Normale Supérieure El Bachir El Ibrahimi – Kouba – Alger–Algérie. Email : sihem.kasdali@g.ens-kouba.dz

I. INTRODUCTION ET CONTEXTE

L'objectif principal de l'enseignement des mathématiques, selon le programme officiel au cycle collège en Algérie, est de mettre à la disposition de l'élève les outils de réflexion nécessaires pour mener une démarche scientifique rigoureuse face à des problèmes et de pouvoir faire un transfert dans toute situation possible.

L'Algérie a connu depuis son indépendance plusieurs réformes de programmes, la dernière en 2008 (Loi n°08.04). Les documents éducatifs officiels ont été mis à jour et rédigés pour les niveaux d'enseignement primaire et collège en septembre 2016.

Les programmes des mathématiques et des sciences expérimentales (sciences physiques, sciences de la nature et de la vie) ont connu des changements substantiels qui ont modifié le déroulement de l'opération de l'apprentissage, la construction de la connaissance et sa mobilisation à l'intérieur et à l'extérieur de l'école.

Cet article décrit et analyse les moyens et les stratégies prévues par les programmes pour développer la démarche scientifique chez l'élève du collège. L'objectif est double, d'une part recenser toutes les situations problèmes proposées dans les manuels scolaires en mathématiques et des sciences expérimentales et d'autre part, analyser l'efficacité d'usage de la démarche scientifique.

II. REGARD EPISTÉMOLOGIQUE ET COMPARAISON PRÉLIMINAIRE

Parler des sciences expérimentales (notamment des sciences physiques et sciences de la nature et de la vie) évoque souvent le protocole « expérience, observation, hypothèse et étape inductive, déductive » (Andler, 2005 ; Dias, 2008).

La démarche scientifique en sciences expérimentales est caractérisée par deux approches fondamentales : la démarche inductive et la démarche déductive. La première démarre par l'observation de la réalité comme source de connaissance et ce, dans le but d'extraire les lois qui régissent le phénomène d'étude. Ces lois sont préexistantes ce qui ferait aboutir à retrouver la même observation en répétant la même expérience. La deuxième démarche (déductive) est basée sur la déduction où les données théoriques viennent en premier et la réalité (qui n'est plus source de connaissance) comme sujet de confrontation avec la connaissance (Gandit et al., 2010)

Les mathématiques ont longtemps été présentées comme une science déductive, régie par des lois logiques strictes et un langage symbolique, basée sur les lemmes, les définitions, les théories et les preuves (Andler, 2005). Par ailleurs, les mathématiques en genèse, étaient une science expérimentale, inductive. A ses débuts, elle n'était jamais présentée comme telle (déductive, logique) ni pour l'apprenant, ni pour l'enseignant, ni pour le public (Pólya, 1971).

Il existe un débat philosophique ancien qui examine l'origine des concepts mathématiques, qu'ils soient d'origine mentale ou expérimentale. La dimension abstraite des notions mathématiques (tels que le point, la droite, le nombre...) en est une autre raison supplémentaire qui sépare ainsi les mathématiques des autres sciences expérimentales.

En revanche, les mathématiques ont évolué et se formulent à présent en problèmes, dont les origines et les contextes diffèrent. Parler d'expérimentation en mathématiques est devenu usuel. L'incursion des technologies ont participé à développer cet aspect expérimental des mathématiques. Ces derniers aident à poser des conjectures et de déceler certains phénomènes mathématiques (Chevallard, 1992), ce qui a conduit à l'émergence d'une nouvelle branche de mathématiques connue sous le nom de mathématiques expérimentales, qui dépend de la grande capacité et la vitesse de l'ordinateur à détecter des modèles et des calculs. Andler (2005) confirme que l'expérimentation représente 90% de l'activité mathématique, 10% restent pour la preuve.

Le principe de la démarche expérimentale en mathématiques a reçu une attention particulière de la part des chercheurs et des organismes scientifiques compétents, en particulier au cours des deux dernières décennies (Chevallard, 1992 ; Dahan, 2005 ; Andler, 2005 ; Aldon, 2007 ; Briand, 2007 ; Gandit, Triquet et Guillaud, 2010 ; Kuntz, Durand-Guerrier et Trouche, 2007 ; Perrin, 2007 ; Dias, 2008 ; Giroud, 2011). Compte tenu des différents aspects dont jouit ce concept, les recherches ont mis l'accent sur les aspects épistémologiques et éducatifs. Elles se sont penchées également sur les contributions des technologies de l'information et de la communication (TICE) et sur la formation des formateurs. Les recherches s'accordent sur le fait que la démarche expérimentale en mathématiques est une procédure active et efficace dans le traitement des problèmes mathématiques.

Par *expérimentation* en mathématiques, nous entendons l'application de la démarche expérimentale pour résoudre un problème (Kuntz, Dias, Durand-Guerrier, & Trouche, 2007). L'expérimentation en mathématiques n'a de sens qu'en tenant compte de ses deux aspects principaux : la formulation (aspect formel) et la preuve (démonstration). Ainsi, il n'est pas possible de dissocier entre l'expérimentation et la preuve ou le choix entre eux. La démarche expérimentale consiste à expérimenter, observer, rédiger des conjectures, essayer de démontrer ces conjectures, produire des contre-exemples, produire de nouvelles conjectures et les démontrer (Giroud, 2011).

Les tâches provoquées face à un problème ne sont pas nécessairement organisées. Elles se chevauchent souvent et se génèrent mutuellement. L'achèvement et l'observation d'une expérience nous amène à générer des conjectures formulées sous forme de propositions mathématiques et il est possible de tester leur validité en ré-expérimentant. Ceci peut aboutir à des contre-exemples réfutant la proposition en question ou à attester la validité de cette dernière et amorcer sa démonstration. Il peut être nécessaire de revenir à l'expérience pour produire des arguments locaux qui aident à visualiser de nouvelles méthodes de preuve (Kuntz et al., 2007 ; Giroud, 2011).

III. PROBLÉMATIQUE

Compte tenu de l'intérêt porté à la démarche scientifique représentée par sa dimension expérimentale dans les documents officiels des mathématiques et des sciences expérimentales au collège et dans la littérature, la question de la réalité du terrain se pose d'elle-même. En d'autres termes, quel est l'usage de la démarche scientifique dans les disciplines des mathématiques et des sciences expérimentales au collège ? A quel point, une telle démarche

participe à l'acte d'apprentissage ? Quelles sont les conditions qui favorisent ou entravent cette démarche ?

IV. METHODOLOGIE

Notre méthodologie repose sur une analyse des documents officiels et la triangulation des résultats obtenus. Les documents analysés sont les programmes et les manuels scolaires niveau collège. L'objectif étant de repérer dans les ressources recensées, les éléments de la démarche scientifique, son usage et les articulations qu'elle engage.

En effet, les programmes donnent les orientations tandis que les manuels traduisent sur le terrain lesdites orientations (du programme) en activités éducatives pratiquées en classe. L'analyse des manuels devient une démarche essentielle qui interprète sur le terrain la mise en œuvre de la démarche scientifique et le degré de son appropriation.

Dans ce sens, une grille d'analyse des manuels a été établie afin d'analyser cette mise en œuvre. Trois dimensions d'analyse ont été retenus à cet effet :

1. Le sens de la démarche scientifique et particulièrement de l'effort expérimental dans les manuels

Il s'agit d'identifier :

- a. La place de la pratique scientifique dans les exercices/problèmes
- b. Le scénario du déroulement de la pratique scientifique
2. Le rôle associé de la démarche scientifique dans les manuels et les programmes
 - a. Acquisition des connaissances ou/vs recherche sur l'apprentissage
 - b. Conjonction et induction ou déduction et construction des démonstrations ou les deux
 - c. Type d'expérience incluses dans les exercices des manuels
 - d. Usage de la démonstration par contre-exemple
 - e. Apprentissage et exploitation du principe de la modélisation
3. Apport des TICE dans la démarche scientifique et l'expérimentation plus particulièrement

V. RÉSULTATS

Nous présentons ci-dessous les résultats de l'analyse des programmes et des guides que nous qualifions de volet théorique (ce qui est prévu-attendu), et les résultats de l'analyse des manuels : le volet pratique qui décrit ce qui se concrétise sur le terrain.

1. Volet théorique

Programme des mathématiques

La résolution de problèmes est la pierre angulaire de l'approche adoptée par les programmes de mathématiques. Celle-ci joue un double rôle : le premier en tant que sujet, puisque l'objet des mathématiques est de poser et résoudre des problèmes. Le second, en tant qu'outil, l'activité de résolution de problèmes est au cœur même de l'acte d'apprentissage. La connaissance mathématique ne se construit et ne prend de sens chez l'élève qu'en la mobilisant dans la résolution de divers problèmes. La résolution de problèmes mathématiques et la formation à la pensée exigent les mêmes compétences que la production de mathématiques. C'est la raison pour laquelle le programme de mathématiques pour l'enseignement moyen :

- Place l'apprenant dans une situation d'exercice effectif de l'activité mathématique et qui consiste à : comprendre le problème, conjecturer, expérimenter sur des exemples, construire une justification, rédiger une solution, valider les résultats, communiquer et échanger autour de la solution
- Considère les problèmes comme point de départ de l'activité mathématique au lieu des définitions et un outil de construction de nouveaux savoirs mathématiques, un environnement pour intégrer, évaluer et orienter ses acquisitions (ministère de l'Éducation National, 2003 ; 2016b)
- Incite l'enseignant à construire et à sélectionner des situations appropriées qui aident l'élève à exercer une véritable activité mathématique, et à accorder plus d'importance aux perceptions personnelles de l'élève lorsqu'il résout le problème et ce plus que le résultat final en question.
- Délimite les objectifs d'enseignement des mathématiques au niveau collège, « à permettre à l'apprenant d'acquérir les fondements de la démarche scientifique et leurs mobilisations dans le traitement des problèmes qui est basé essentiellement sur l'expérimentation, les hypothèses et l'argumentation » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2016b)
- Invite à l'intégration des outils numériques dans l'apprentissage des mathématiques afin de donner du sens à la connaissance et de la construire à travers les différents problèmes résolus par l'élève. Le programme souligne que ces technologies, qui deviennent de plus en plus présentes dans le contexte et la vie de l'élève, fournissent un environnement fertile pour construire des propositions qui donnent à l'élève de nombreuses occasions d'expérimenter, d'observer, de produire des conjectures et de l'aider à valider ses résultats.

L'apport attendu par les programmes est donc double : l'entraînement à la recherche et la construction des savoirs. Les activités sont consacrées à la construction de nouvelles connaissances, la démarche expérimentale est utilisée pour construire des connaissances stables chez l'élève et sont ensuite démontrées dans une activité indépendante. Ceci permet à l'élève de construire et d'appréhender des connaissances en les expérimentant et évite de lui inculquer des connaissances de façon transmissive.

Programme des sciences expérimentales

Le livret du programme d'enseignement moyen pour les sciences de la nature et de la vie (ministère de l'Éducation Nationale, 2016b) identifie une différence entre la méthode expérimentale et la démarche expérimentale. Il décrit chacun de ces concepts comme suit :

- Méthode : ensemble d'étapes séquencées (observation, hypothèse, expérimentation, résultat et conclusion) qui doivent être suivies automatiquement (sorte de protocole)
- Démarche : ensembles d'étapes dont l'essai et l'erreur sont les clés pour arriver à une solution du problème. Elle offre à l'apprenant toute latitude pour exprimer sa créativité et sa pensée, c'est le contraire de la méthode expérimentale qui est dirigée et guidée.

Dans le programme des sciences physiques, nous retrouvons les définitions suivantes :

- Méthode : un procédé dont les repères sont connus et dont les étapes de réflexion sont prévisibles
- Démarche : un plan d'action non connu visant à accomplir une mission sans identifier les étapes préalablement. Ces étapes ne sont pas menées de façon aléatoire, mais de façon raisonnée basée sur la pensée et la connaissance

Le document accompagnant le programme des sciences de la nature et de la vie indique que la méthode expérimentale n'est pas considérée comme un modèle satisfaisant en tant qu'activité scientifique, mais souligne qu'elle peut être utile au niveau pédagogique, d'autant plus qu'elle permet à l'apprenant d'accéder à des connaissances stables. La démarche expérimentale est une démarche d'investigation par excellence pour aborder des situations de recherche. Elle peut également être utilisée comme un outil pour construire de nouvelles connaissances mathématiques (Aldon, 2007).

2. Volet pratique

Sur le plan pratique, nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus via la grille d'analyse établie sur la base des manuels scolaires officiels en vigueur (mathématiques et sciences expérimentales). Nous regroupons la description de chaque indicateur dans sa dimension de rattachement.

Dimension 1 : Le sens de la démarche scientifique et de l'expérimentale

Les énoncés des problèmes existants dans le manuel sont subdivisés en tâches simples et ordonnées (linéarité), ce qui décrit implicitement le plan de résolution du problème. La situation va parfois au-delà pour préciser à l'élève les éléments qu'il doit observer et comment les observer.

Dimension 2 : L'apport attendu de la démarche scientifique (type d'usage)

Les manuels explicitent l'usage de la démarche expérimentale. D'une part, à travers les problèmes proposés à l'élève pour exercer cette démarche de façon implicite et comme compétence transversale et d'autre part, l'usage est annoncé à travers les titres des problèmes.

Exemples : de la conjoncture à la démonstration, séquences conjoncturelles, usage de Géogébra pour conjoncturer, utilise un contre-exemple, je pose une conjoncture et je justifie ... etc.

La plupart des problèmes proposés sont « *générateurs* » de conjoncture, et la démarche ne s'oriente que très peu vers la démonstration des conjonctures émises.

Les exercices du manuel n'aident pas à apprendre la démonstration par un contre-exemple. L'allusion et l'usage d'une telle démarche sont faibles ou très directifs. La démonstration dans les problèmes est plus fréquemment dans le sens de la validation que de l'infirmer.

Nous retrouvons l'usage du contre-exemple dans le manuel de 3^{ème} année moyen dans des exercices fermés de type « répondre par juste ou faux ». Également, dans deux autres exercices dont le premier sous le titre « Utilise un contre-exemple » et le second sous le titre « Contre-exemple ». Les énoncés de ces deux exercices présentent une conjoncture fautive issue d'une expérimentation ; il est demandé à l'élève d'effectuer une expérimentation de validation pour prouver l'erreur.

Nous retrouvons dans les manuels des sciences expérimentales quelques convocations du principe de modélisation. Ceci se manifeste dans la collecte des données par exemple, la représentation en graphique et l'interprétation en fonction. La situation est autre en mathématiques ; nous ne retrouvons pas d'exercice ou de problème amenant l'élève à formuler le modèle requis par l'énoncé.

Dimension 3 : Apport des TICE dans la démarche scientifique et l'expérimentation plus particulièrement

Les outils numériques ne sont pas exploités de façon à servir réellement la démarche scientifique. En effet, leurs usages se limitent aux calculs et aux constructions géométriques afin de générer ou valider une conjoncture et de façon directive (linéaire).

VI. INTERPRÉTATIONS

Les problèmes du manuel n'aident pas à la pratique expérimentale et ce, malgré la présence des éléments d'une telle approche. Ainsi, la démarche scientifique subit le même sort.

Les éléments de la démarche sont présents, mais les principales caractéristiques ainsi que les articulations entre elles sont absentes. Ceci est essentiellement dû à la fragmentation du texte du problème en étapes pour en faire des tâches simples à accomplir (linéarité). Cette division a contribué à orienter l'élève dans sa démarche et suivre un raisonnement guidé et a dépourvu la démarche scientifique de sa valeur « recherche et tâtonnement ».

L'élève joue un rôle d'observateur, son rôle se résume à s'assurer de l'exactitude de ses procédures telles que la réalisation des calculs, le traçage des courbes ...

Or, pour réaliser une vraie démarche scientifique, l'élève doit identifier par lui-même l'expérience à réaliser et choisir les outils à exploiter. Il doit également repérer les éléments à observer et déterminer la méthode d'observation. Cette présentation linéaire des consignes (expérience, observation, conjoncture, démonstration) exclut toute interaction et articulation possibles entre les éléments.

Nous notons que le manuel a été conçu de façon à être exploité indépendamment de l'enseignant ; les élèves peuvent résoudre les activités demandées sans intervention d'autrui.

Par ailleurs, les utilisations implicites et explicites de la démarche scientifique retrouvées dans les manuels, démontrent un usage en tant qu'outil mais aussi en tant que sujet pour traiter les activités.

La démonstration par contre-exemple est un des outils de la démarche scientifique. Sa mobilisation à bon escient permet d'infirmer une conjoncture. Elle est cependant peu convoquée et pour certains élèves source de confusion.

La modélisation est à son tour une approche au service de la démarche scientifique qui assure la transition de la pratique au théorique. Une telle approche s'acquière par la pratique et par l'essai et l'erreur. En fait, son usage convoque plusieurs registres et est l'outil -par excellence- au service de l'interdisciplinarité.

Le manque d'interaction entre les disciplines rompt le lien qui donne du sens aux outils mathématiques et leurs usages. Pour Trouche (2019) *“une communication entre disciplines, même proches, suppose non pas un chemin en surface, mais un approfondissement conceptuel conjoint”*.

Nous remarquons dans les manuels une sous-exploitation des TICE et de leur potentiel. Les activités exploitant ces derniers sont rares et se focalisent sur le volet technique pour la maîtrise de l'outil. L'apport escompté par l'incursion des TICE est diminué. Imaginer des séquences de recherche exploitant les TICE ou la formation à une telle démarche est à envisager afin de profiter pleinement des possibilités offertes de ces outils.

En résumé, nous pouvons attester à nos manuels des points forts et des points faibles au profit de la pratique de la démarche scientifique.

VII. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le constat contrasté de l'usage de la démarche scientifique peut être imputé à plusieurs raisons.

Le choix des situations est un des défis à soulever par les chargés des programmes. Ces situations sont à construire de façon à permettre à l'élève de mobiliser la démarche scientifique avec tous ses éléments et garantir l'interaction entre ces derniers par un va-et-vient entre la théorie et la pratique. Cette efficience ne peut être atteinte que si la liberté d'agir de l'élève et sa prise d'initiative sont de mise.

Il existe peu d'activité amenant à des propositions fausses et en occurrence à l'usage du contre-exemple, ce qui prive l'élève de choisir les procédures à suivre et les tester. A cet égard, l'approche collaborative pourrait être d'un grand apport pour pallier ces manquements ; l'aide des pairs, le conflit socio-cognitif, l'accompagnement de l'enseignant comme coach et non pas comme transmetteur du savoir, ...etc.

Cette approche bien qu'attestée reste chronophage, ce qui nous amène à une autre raison justifiant l'usage décrit de la démarche scientifique dans les manuels. Une des obsessions des enseignants est l'achèvement du programme et donc le respect des éléments à transmettre par séance et ne pas déborder. Le traitement des problèmes demande forcément un temps plus

important, il est donc nécessaire de penser à des solutions. L'idée de créer des créneaux horaires pour le traitement des problèmes serait intéressante à l'instar de ce qui s'est fait en France par exemple en 2008 par le dispositif MPS (méthodes de pratiques scientifiques) et en Turquie (Mangiavillano, 2016). Ces deux dispositifs présentent des expériences intéressantes qui peuvent inspirer notre système éducatif. Dans ces deux exemples, la pédagogie de projet est l'idée centrale autour de laquelle se construit et interagit le savoir, le savoir faire et le savoir être.

De telles expériences peuvent aussi pallier la tendance de travailler les concepts mathématiques indépendamment de leur environnement, de leur sens profond et de leur usage, il est nécessaire de revenir à l'approche centrale des mathématiques qui est la résolution par problème, « *la pédagogie de projet donne [...] une nouvelle dimension à l'interdisciplinarité* » (Mangiavillano, 2016) . Les mathématiques ne peuvent pas à elles seules, avec le volume horaire qui leur est attribué, répondre à un tel objectif qui devrait être transversal pour le développement de la pensée scientifique de l'élève en général, et des mathématiques en particulier. L'interdisciplinarité devient le levier d'un changement forcé mais prometteur pour « *présenter les mathématiques comme une science vivante en pleine expansion dont l'évolution se nourrit de celle des autres champs scientifiques et les nourrit en retour* » (Trouche, 2014). En effet, « *au-delà de poser la question complexe, récurrente et indispensable de l'articulation entre science et monde, la question de la preuve, à la fois épistémologique, théorique et méthodologique, pose également celle de l'articulation entre les sciences elles-mêmes, ou plus exactement entre les productions scientifiques, et par voie de conséquence, celle de la coïncidence du discours scientifique à lui-même* » (Delarue-Breton, 2022).

L'usage des TICE tel qu'il est actuellement fait défaut, la non maîtrise des enseignants et des élèves de ces outils orientent les activités vers le volet technique au détriment du volet apprentissage, alors que ces outils sont au service de l'action pédagogique avant tout « *les sciences sont supposées participer à la culture numérique des collégiens : construction des savoirs et savoir-faire, connaissance du fonctionnement des matériels et des logiciels, utilisation de l'informatique dans un esprit citoyen. Les mathématiques sont présentées comme contribuant à la structuration de la pensée, et fournissant modèles et outils aux autres disciplines* » (Trouche, 2014).

La nouvelle approche de l'enseignement des mathématiques (par résolution de problèmes) au sens d'une démarche scientifique réelle ne peut atteindre ses objectifs tracés que si une telle démarche s'inscrit dans une dimension interdisciplinaire instrumentée par les TICE et actualisée par les besoins sociétaux en perpétuel changement. La formation des formateurs se doit de prendre en charge ce volet de veille, notamment face à l'IA (intelligence artificielle) qui peut potentiellement questionner la démarche scientifique « *former les enseignants à l'IA, c'est aussi en quelque sorte œuvrer à prévenir les dérives potentielles qui pourraient survenir dans un proche futur* » (Karsenti, 2018).

REFERENCES

- Aldon, G. (2007). *La place des TICE dans une démarche expérimentale en mathématiques*. Récupéré sur Eduscol: http://media.eduscol.education.fr/file/Formation_continue_enseignants/15/3/StFlour2007_Aldon_110153.pdf
- Andler, M. (2005). La démarche d'investigation en mathématiques : Pour elle-même ? En relation avec les sciences expérimentales ? *Colloque : mathématiques, sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire*, Saint-Etienne. France. 28 septembre 2005
- Briand, J. (2007). La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe. *Petit x* 75, 7-33.
- Cayhuela, A. (2013). Les plate-formes collaboratives et le développement des compétences collectives. *Management des technologies organisationnelles*, 3, 229-238. <https://www-cairn-info.sndll.arn.dz/revue--2013-1-page-229.htm>
- Chevallard, Y. (1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, (30), pp. 5-15.
- Dahan, J. J. (2005). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-*. [Thèse de doctorat], Université Joseph-Fourier - Grenoble I
- Delarue-Breton. (2022). Notion de preuve et coïncidence du discours scientifique à lui-même : une question pour la recherche et pour la formation. *Éducation & didactique*, 167-172. doi:<https://doi-org.sndll.arn.dz/10.4000/educationdidactique.10867>
- Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : Un levier pour*. Université Clause Bernard.
- Gandit, M., Triquet, E., & Guillaud, J.-C. (2010). Démarches scientifiques, démarches d'investigation en sciences expérimentales et en mathématiques : Représentations d'enseignants stagiaires de L'IUFM. *Congrès : l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF)*. Université de Genève, septembre 2010.
- Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse du Doctorat en didactiques des mathématiques. Université Grenoble Alpes.
- Karsenti, T. (2018). Intelligence artificielle en éducation : L'urgence de préparer les futurs enseignants aujourd'hui pour l'école de demain ? *Formation et profession*, 3(26), p. 112_119. doi:<http://dx.doi.org/10.18162/fp.2018.a159>
- Mangiavillano, V. (2016). La pédagogie de projet et les TICE au service de l'interdisciplinarité au sein du lycée français saint benoît. [Saint Benoît Fransız Lisesi'ndeki Disiplinler Arası Çalışmaları Yürüten Eğitimde Bilgi ve İletişim Teknolojileri Komitesi ve Proje Pedagojisi P. *Synergies Turquie*(9), pp. 129-145.
- Pólya, G. (1971). *How to solve it : A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Trouche, L. (2014). L'enseignement des mathématiques aujourd'hui : Problèmes et perspectives. *Séminaire Nationale de l'Enseignement des Mathématiques*. 4, pp. 40-48. Alger-Algérie: Educ Recherche. Consulté le décembre 01, 2023, sur <https://www.asjp.cerist.dz/en/downArticle/573/4/1/95443>

Trouche, L. (2019). Rien n'est plus pratique qu'une bonne interdisciplinarité. *Hermès*(85), pp. 98-102. doi:<https://doi-org.snd11.arn.dz/10.3917/herm.085.0098>

وزارة التربية الوطنية (2016). *منهاج الرياضيات لمرحلة التعليم المتوسط، وثيقة صادرة عن اللجنة الوطنية للمناهج*. الجزائر: الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية.

وزارة التربية الوطنية (2016). *منهاج العلوم الطبيعية لمرحلة التعليم المتوسط، وثيقة صادرة عن اللجنة الوطنية للمناهج*. الجزائر: الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية.

LE MÉCANISME MÉTAPHORIQUE DES ALGORITHMES

Imad MAHNANE*

Résumé - Dans ce travail, nous posons à nouveaux frais la problématique de la nature métaphorique du système décimal positionnel dans une perspective interdisciplinaire qui permet d'étudier les liens entre l'arithmétique et la sémantique cognitive. Les pistes théoriques et empiriques, qui mèneraient au développement d'une approche ayant pour but de déceler ces liens, sont plus ou moins claires selon que les concepts à investir dans cette perspective de recherche soient rigoureusement formulés et définissables dans une vision qui relie au moins deux algorithmes de l'arithmétique. Ce travail poursuit, par l'analyse des mécanismes métaphoriques faisant de la multiplication une opération effectuable par le biais de la soustraction, la création des éléments du schéma conceptuel qui pourrait nous servir, dans une optique didactique, d'observer et d'illustrer les mécanismes métaphoriques dans le fonctionnement du système décimal, et de développer une approche sémantico-cognitive de la métaphore.

Mots-clés : Métaphore, mécanisme, emprunt, clé de la base, intervalle de métaphorisation.

Abstract - In this work, we raise anew the question of the metaphorical nature of the base-10 system in an interdisciplinary perspective that would allow us to explore the links between arithmetic and cognitive semantics. The theoretical and empirical paths that would lead to investigating these links are more or less clear depending on whether the concepts to be invested in this research perspective are rigorously formulated and definable in a vision that bounds at least two algorithms of arithmetic. This work continues through the analysis of the metaphorical mechanisms making multiplication an operation that can be carried out through subtraction the creation of a conceptual scheme that could serve, from a didactic perspective, to observe and illustrate the metaphorical mechanisms in the functioning of the decimal system. This perspective is intimately related to the semantic-cognitive approach to metaphor.

Keywords: Metaphor, mechanism, borrowing, key of 10-base, metaphorization interval.

* Université de la Jendouba - Tunisie - imad.mahnane@isshj.u-jendouba.tn

I. INTRODUCTION

La définition de la métaphore conceptuelle proposée par Lakoff et Nunez (2000), étant basée sur la dichotomie abstrait/concret, clarifie les caractéristiques des mécanismes métaphoriques des algorithmes et celles du système décimal de position, mais sans préciser les modalités de fonctionnement de ce système¹. Encore qu'il soit clair que le système de numération révèle une certaine hiérarchie de positions conçue par une métaphore orientée (la plus grande position, ou encore la position la plus élevée d'un nombre), il est nécessaire de montrer si cette hiérarchie de positions détermine une hiérarchie de niveaux d'abstraction : la position des centaines constitue-t-elle un niveau plus abstrait que celui des unités dans la hiérarchie positionnelle du nombre ?

Le concept de « **clé de la base** »² que nous proposons dans notre essai constitue le nerf de cette esquisse. Il nous permet de générer tous les produits de la table de multiplication par le biais de la soustraction³. Un concept pareil pourrait faire le sujet d'un débat au sein des cercles de la didactique des mathématiques pour discuter de son apport à l'enseignement de l'arithmétique, mais également dans le cadre des études sémantico-cognitives (ou comme nous voudrions les appeler « études arithmético-sémantiques ») vu qu'il présuppose la possibilité de mettre en question le concept de « **métaphores ancrées de l'arithmétique** » aussi bien que celui des extensions de ces métaphores telles qu'elles ont été développées dans Lakoff et Nunez (2000).

Soulignons que nous visons par cette approche l'illustration de la nature métaphorique des algorithmes de l'arithmétique afin de créer un dispositif conceptuel susceptible d'être investi dans l'étude de la métaphore comme mécanisme conceptuel qui se manifeste dans plusieurs formes de représentation symboliques et verbales.

Quatre techniques sont illustrées dans ce travail. Nous les avons créées nous-mêmes en opérant des manipulations sur des opérations de multiplication à partir du concept de **clé de la base** (ou encore clé décimale). La possibilité que ces techniques aient été d'usage dans certaines traditions mathématiques au cours de l'histoire n'est pas exclue. Il revient aux historiens des mathématiques de répondre à cette question.

II. LE MÉCANISME MÉTAPHORIQUE DE LA MULTIPLICATION

La multiplication est une opération ayant pour but d'obtenir à partir de deux nombres a (le multiplicande) et b (le multiplicateur) un nombre c (le produit) égal à la somme de b termes égaux à a . En d'autres mots, La multiplication sert à additionner plusieurs fois le même nombre. Dans cette définition la multiplication est conçue à partir de l'addition. Du point de vue

¹ Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à l'Association Tunisienne de Didactique des Mathématiques pour le débat que les membres et les participants ont mené autour de ce travail lors de la tenue du 14^{ème} colloque, le 26 décembre 2023 à IPEIEM, Tunis. Nous tenons également à remercier Dr Mounir Dhieb, membre fondateur de l'association pour son intérêt et sa lecture approfondie de notre travail et pour ses suggestions qui nous ont été d'une grande utilité. Nous adressons également nos sincères remerciements à Yassine Hachaichi, enseignant chercheur à l'Ecole Polytechnique de Tunisie pour la lecture du manuscrit de ce travail et pour la preuve de la première technique dite « Technique de la clé de la base ».

² Voir Baharti Krsna Tirtha, Swami (1965).

³ Dans Mahnane (2023, p. 68), nous avons signalé un retour vers le principe des mathématiques védiques (Tous de neuf et le dernier de dix).

pragmatique, la multiplication n'existe qu'en tant qu'abstraction de l'addition. Il n'est possible que d'ajouter, la multiplication en reste une abstraction de l'ajout et un raccourci du processus de l'addition ou, plus précisément, elle est la représentation d'un cas particulier de l'addition à savoir l'addition effectuée entre des égalités. Dans leur analyse des opérations de l'arithmétique et de leurs mécanismes métaphoriques, Lakoff et Nunez montrent que la multiplication et la division sont cognitivement plus compliquées que l'addition et la soustraction (Lakoff et Nunez, 2000, p. 60).

Vu le coût cognitif élevé et la nature complexe de la multiplication et de la division Lakoff et Nunez proposent l'extension de la *Métaphore L'Arithmétique Comme Collection d'Objets* (*Arithmitic As Object Collection*), une extension qui consiste à lier métaphoriquement le domaine source et le domaine cible « *But with multiplication, we do need to refer to numbers and collections simultaneously, since understanding multiplication in terms of collections requires performing operations on collections a certain number of times. This cannot be done in a domain with collections alone or numbers alone. In this respect, multiplication is cognitively more complex than addition or subtraction. The cognitive mechanism that allows us to extend this metaphor from addition and subtraction to multiplication and division is metaphoric blending* » (Ibid.).

Afin d'illustrer cette extension nous proposons les énoncés suivants :

- $4 \times 5 = 20$
- Quatre pommes $\times$ cinq est égal à vingt pommes

Mais l'énoncé suivant est dépourvu de sens :

- * Quatre pommes $\times$ cinq pommes ...

Dans une multiplication, si l'on assigne à l'un des facteurs un objet compté c'est que ce nombre avec son objet compté font l'objet compté de l'autre facteur. La structure du multiplicande est binaire (nombre et objet compté : 1. quatre 2. pommes), celle du multiplicateur l'est aussi [1. cinq 2. (quatre pommes)].

III. LES TECHNIQUES DE LA MULTIPLICATION

La multiplication classique reste la technique la plus réputée de telle manière que la majorité des apprenants identifient la multiplication en tant qu'algorithme de l'arithmétique à cette technique. Le qualificatif « classique » en réfère à la fréquence d'usage et non pas à l'ancienneté ou à la parution antérieure par rapport aux autres techniques telles que :

- La technique per Gelosia
- La technique de Fourier
- La technique de l'abaque
- La technique de multiplication moderne
- La technique de Tchou le chinois
- La technique égyptienne
- La Technique russe

L'application de chacune de ces techniques exige l'effectuation d'un nombre d'additions qui varie en fonction du nombre de chiffres constituant le multiplicande et le multiplicateur et de

la technique utilisée. Ce qui reste à investiguer dans notre travail est la possibilité d'effectuer une multiplication par le biais de la soustraction. Cette investigation relève de la mise en question de l'extension de la *Métaphore L'Arithmétique Comme Collection d'Objets (Arithmitic As Object Collection)* proposée par la théorie cognitive (Lakoff et Nunez, 2000).

Lakoff et son coauteur étendent cette métaphore de l'addition à la multiplication et de la soustraction à la division. L'enjeu de relier multiplication et soustraction est censé tracer une nouvelle piste dans la théorie cognitive. Dans le but de poursuivre la création du schéma conceptuel susceptible d'explorer les mécanismes métaphoriques des algorithmes de l'arithmétique nous proposons quatre techniques reliant multiplication et soustraction.

Notons que les nombres considérés ici sont les entiers relatifs de l'intervalle réel $[-9, 9]$.

1. Technique de la clé de la base

Soit à calculer le produit $a \times b$ où a et b sont des entiers positifs de $[0, 9]$.

Soient A la différence entre 10 et le multiplicande, et B la différence entre 10 le multiplicateur. Rappelons que nous avons défini A et B comme étant les clés de la base respectifs de a et b (Mahane, 2023).

La méthode se compose de deux étapes :

1/ Nous multiplions A par B . Nous notons la valeur des unités et retenons celle des dizaines s'il y en a.

Pour le produit 8×7 on a $2 \times 3 = 6$. Nous notons 6 comme étant la valeur occupant la position des unités du produit 8×7 .

2/ Nous additionnons les deux opérandes : $8 + 7 = 15$. Et nous notons la valeur des unités du résultat (5) comme valeur des dizaines devant le 6 obtenu de la multiplication des deux compléments que nous appelons (clés décimales ou clés de la base), et nous obtenons 56.⁴

Remarque : Il faut négliger la valeur des dizaines du nombre 15 à la fin.

Nous constatons que selon cette méthode, le produit (7×8) est généré à partir du produit des deux clés (3×2) et de la somme des deux termes ($7 + 8 = 15$). La valeur des unités du produit des clés (6) en constitue la valeur des unités, tandis que la valeur des unités (5) de la somme des facteurs en constitue la valeur occupant la position des dizaines. La multiplication s'est

⁴ Cette preuve a été fournie par Yassine Hachaichi :

$$\begin{aligned}(10 - a)(10 - b) &= 100 - (a + b)10 + ab \\ (10 - a)(10 - b) + (a + b)10 - 100 &= ab\end{aligned}$$

Exemples :

$a = 8$, (ce qui est appelé la clé de la base est $10 - a = 2$)

$b = 7$, (ce qui est appelé la clé de la base est $10 - b = 3$)

$$8 \times 7 = (3 \times 2) + (15 \times 10) - 100 = 6 + 150 - 100 = 56$$

$a = 9$, (ce que nous appelons la clé de la base : $10 - a = 1$)

$b = 5$, (ce que nous appelons la clé de la base : $10 - b = 5$)

$$9 \times 5 = (1 \times 5) + (14 \times 10) - 100 = 5 + 140 - 100 = 45$$

effectuée par l'intermédiaire de la soustraction et de l'addition. Le caractère métaphorique de cette technique se manifeste doublement :

- l'effectuation de la multiplication par l'intermédiaire de la soustraction et de l'addition.
- le transport de la valeur d'une position décimale à une autre, à savoir la valeur des unités de la somme qui devient la valeur des dizaines du produit.

Comme le montre le caractère métaphorique de la technique des clés de la base, le sens aristotélicien de la métaphore « le transport à une entité du terme qui en désigne une autre », trouve sa vérification dans le rapport d'échange positionnel et algorithmique qui relie ces valeurs numériques. Cela ne revient pas uniquement à dire que la métaphore est un mécanisme cognitif selon lequel un concept est appréhendé par le biais d'un autre concept, mais aussi à dire que l'investigation de la métaphore dans les différentes formes de raisonnement et d'expression doit soulever la problématique de l'appréhension du concept de la métaphore même par le biais d'un autre concept (Métamétaphore).

Nous constatons de même que la valeur non nulle des dizaines du produit des clés (prenons à titre d'exemple le cas du produit (6×3)) se transforme en retenue qu'on ajoute à la valeur des unités de la somme des facteurs.

Pour le produit $6 \times 3 (= 18)$

- 1/ nous multiplions les deux clés 4 et 7 ($= 28$)
- 2/ nous notons 8 et retenons 2
- 3/ nous additionnons 3 et 6 ($= 9$)
- 4/ nous ajoutons la retenue 2 à la somme des deux facteurs ($9 + 2 = 11$)
- 5/ nous notons 1 (chiffre des unités) comme valeur des dizaines du produit : $3 \times 6 = 18$.

Essayons maintenant avec 7×3 (dont les clés des facteurs sont respectivement 3 et 7).

- 1/ Nous multiplions 3 par 7. Nous obtenons 21. Nous notons 1 comme valeur des unités et retenons 2.
- 2/ Nous additionnons 7 et 3 $= 10$. Nous notons le 0 sous la retenue (2), et enfin nous les additionnons pour obtenir 21 (Baharti Krsna Tirtha Swami, 1965).

Nous signalons que « les croisements », c.à.d. lorsque les deux facteurs de la multiplication sont **clés entre eux**, constituent un cas particulier.

* Dans un cas comme celui de 7×3

- L'addition des deux termes donne toujours la base.
- La méthode mène à une **tautologie**.

2. La technique des diagonales

Dans le but d'obtenir la valeur des dizaines du produit $a \times b$, nous pouvons retrancher la clé de a du facteur b ou la clé de b du facteur a .

Pour le produit 7×8 :

- Nous retranchons 2 (la clé du facteur 8) de 7, on obtient 5 (la valeur des dizaines du produit).
- De même si nous retranchons 3 (la clé du terme 7) de 8 pour obtenir 5 comme valeur des dizaines du produit 7×8 .

$$\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ & \nearrow \nwarrow \\ - & \times \\ & \nwarrow \nearrow \\ 7 & \times 8 \end{array}$$

Quant à la valeur des unités, nous faisons la multiplication sur l'une des diagonales, puis nous prenons la clé de la valeur des unités qui en résulte comme valeur des unités du produit. Par exemple, le produit sur l'une des diagonales étant 2×7 égal à 14, la clé de la base de 4 est 6 qui est la valeur des unités du produit 7×8 . Ainsi, $7 \times 8 = 56$. De même si nous opérons sur la deuxième diagonale (3×8).

Cette technique ne s'applique qu'aux produits dont les facteurs sont des valeurs supérieures ou égales à 5.

L'application de la technique des diagonales aux produits ayant un ou deux facteurs inférieurs à 5 exige une transposition de la multiplication des diagonales aux clés de la base. L'effectuation de la soustraction sur l'une des diagonales peut donner une valeur négative.

Pour le produit 3×6 :

- On opère sur la diagonale pour retrancher la clé 4 du facteur 3 ; on obtient (-1).
- On multiplie les deux clés de la base 7 et 4 (au lieu de multiplier sur la diagonale) pour obtenir 28.

On conserve la valeur des unités (8) de ce produit et on ajoute sa valeur des dizaines (2) à (-1) pour obtenir 1 comme valeur des dizaines du produit cherché, soit 18.

Pour le produit 4×9 :

On a : $4 - 1 = 3$; $6 \times 1 = 6$ qu'on prend comme valeur des unités du produit cherché qui est 36.

Mais on peut procéder comme suit :

- soustraire sur l'autre diagonale : $9 - 6 = 3$,
- multiplier les clés de la base 6 et 1 pour obtenir le produit cherché, soit 36.

Il nous sera nécessaire de revenir à cette technique dans des travaux ultérieurs pour en explorer la modalité de transposition multiplicative que les produits dont les facteurs sont inférieurs ou égaux à 5 exigent.

3. *Technique de la colonne*

A/ Pour cette technique Il s'agit de retrancher la clé de la base de la valeur des unités du produit qui précède dans la même colonne de la table de multiplication.

Pour multiplier 7 par 8 il faut se rappeler de 49 qui est le produit qui précède dans la colonne c.à.d. le produit de 7 et 7.

Pour 7×8 :

1/ Nous retranchons 3 du 9, Nous notons 6 comme valeur des unités du produit.

2/ Nous notons $(4 + 1)$ comme valeur des dizaines.

$7 \times 8 = ?$

$$\begin{array}{r} 1/ \quad 4 \quad 9 - (10 - 7) \\ \quad \quad \quad 6 \end{array}$$

2/ $4 + 1$

$$7 \times 8 = 56$$

Si la première étape se fait avec emprunt, nous conservons la valeur des dizaines.

Exemple : pour $7 \times 4 = 28$, le produit précédent dans la colonne de 7 est (7×3) , soit 21.

Nous retranchons 3 de 11 (après emprunt), nous notons 8 comme valeur des unités du nouveau produit. Et nous gardons la même valeur des dizaines (2) pour ce produit.

$7 \times 4 = ?$

$$\begin{array}{r} 1/ \quad 2 \quad \overset{1}{1} - (10 - 7) \\ \quad \quad 11 - 3 \text{ (emprunt)} \\ \quad \quad \quad 8 \end{array}$$

2/ $0 + 2$ (conservation des dizaines)

$$7 \times 4 = 28$$

Pour cette méthode, nous pouvons déduire qu'en cas d'emprunt la valeur des dizaines est conservée.

Cette propriété marque les produits dont les termes se composent d'une seule position c.à.d. celle des unités comme les produits de la colonne 1.

$$1 \times 6 = ?$$

$$1/ \quad \textcolor{red}{1}5 - (10 - 1)$$

$$\textcolor{blue}{1}5 - 9 \text{ (emprunt)}$$

$$6$$

$$2/ \quad 0 + 6 \text{ (conservation des dizaines)}$$

$$1 \times 6 = 6$$

Multiplication par 0

La multiplication par zéro telle que 1×0 suivant cette technique s'étend à des produits négatifs. (*Motion on a Path Metaphor*)

$$1 \times 0, [\text{le produit précédent étant } 1 \times (-1) = -1].$$

$$1/ \quad -\textcolor{red}{1} - (10 - 1) : 10 \text{ étant la valeur empruntée, } -1 \text{ devient } 10-1 \text{ soit } 9$$

$$\textcolor{blue}{9} - 9 \text{ (emprunt)}$$

$$0$$

$$2/ \quad 0 \text{ (conservation des dizaines)}$$

$$= 0$$

Trouvons le produit 4×0 . Le produit précédent étant $4 \times (-1)$.

$$1/ \quad -\textcolor{red}{4} - (10 - 4)$$

$$\textcolor{blue}{6} - 6 \text{ (emprunt)}$$

$$2/ \quad 0 \text{ (conservation des dizaines)}$$

$$= 0$$

Carré d'un nombre négatif

Le carré d'un entier négatif tel que le produit $(-2) \times (-2)$ est trouvable selon la méthode de la colonne.

Commençons par deux définitions que nous entreprenons pour un entier x de l'intervalle $[-9 ; -1]$:

- La clé de la base de x est $10 + x$.

- Selon la méthode dite de la colonne, le produit précédent de x^2 est le produit $x(x + 1)$.

$$(-2) \times (-2) = ?$$

Le produit précédent étant $(-2) \times (-1) = 2$.

$$1/ 12 - (10-2)$$

$$12 - 8 \text{ (emprunt)}$$

2/ (conservation des dizaines)

$$(-2) \times (-2) = 4$$

B/ Il s'agit de rajouter la clé de la base à la valeur des unités du produit qui succède dans la même colonne de la table de multiplication.

Pour multiplier 7 par 8 il faut se rappeler de 63 qui est le produit qui lui succède dans la colonne c.à.d. le produit de 7 et 9.

Pour 7×8 :

1/ Nous ajoutons 3 (la clé de 7) à 3 (la valeur des unités de 63), Nous notons 6 comme valeur des unités du nouveau produit.

2/ Pas de retenue, alors nous retranchons 1 de la valeur des dizaines de 63 ($6 - 1 = 5$) et nous notons cinq comme valeur des dizaines du produit cherché.

$$7 \times 8 = ?$$

$$1/ \quad 6 \quad 3 + (10-7)$$

$$2/ \quad \begin{array}{ccc} & 6 & \\ & \downarrow & \\ 6-1 & & \\ = 5 & \leftarrow & 6 \end{array}$$

Nous Appelons la méthode A la méthode d'emprunt post-compensé .L'emprunt dans la technique B est préexistant ; cette méthode est appelée méthode d'emprunt pré-compensé.

$63 = 56 + 7$. L'ajout de 3 (La clé) lève la différence à 10.

Le carré d'un entier négatif tel que le produit $(-2) \times (-2)$ est trouvable suivant la méthode B/ de la colonne.

$$(-2) \times (-2) = ?$$

Le produit qui lui succède étant $(-2) \times (-3) = 6$.

$$1/ 6 + (10-2)$$

$$6 + 8 = 14$$

2/ (retenue $\rightarrow$ conservation des dizaines)

$$= 04$$

Ainsi, $(-2) \times (-2) = 4$

4. *Technique de la différence entre multiplicande et multiplicateur*

Cette technique consiste à retrancher la plus petite valeur de la plus grande. Dans une première étape nous trouvons la différence entre les deux termes de la multiplication.

Si le multiplicande est plus petit que le multiplicateur, on rajoute son carré au produit du multiplicande et de la différence entre les deux opérandes de la multiplication.

Si le multiplicande est plus grand on retranche le produit du multiplicande et de la différence entre les deux opérandes de la multiplication du carré de ce multiplicande.

1/ Pour $a \geq b$, on utilise : $a \times b = a^2 - a(a - b)$.

Pour le produit 8×5 , la différence des facteurs est 3 et

$$8 \times 5 = 8^2 - (8 \times 3) = 64 - 24 = 40.$$

2/ Pour $a \leq b$, on utilise : $a \times b = a^2 + a(b - a)$.

Pour le produit 5×8 , la différence des facteurs est 3 et

$$5 \times 8 = 5^2 + (5 \times 3) = 25 + 15 = 40.$$

L'interférence entre puissance, multiplication, addition et soustraction dans la technique de la différence entre les termes de la multiplication montre que l'extension des métaphores que Lakoff et Nunez proposent à titre explicatif du mécanisme métaphorique complexe de la multiplication (et de la division) trouve sa vérification de façons diverses dans les différentes traditions mathématiques où les opérations de l'arithmétique ont été développées. Cette interférence ne se réduit pas aux limites des techniques connues dans les mathématiques occidentales.

Ceci peut orienter la recherche ayant pour objet les mécanismes métaphoriques des algorithmes vers d'autres horizons d'investigation. Parmi les pistes envisageables dans ce cadre, celle qui part des capacités innées de l'arithmétique telles qu'elles sont définies dans la théorie cognitiviste, tout en reconnaissant aux traditions mathématiques dans les différentes cultures leur propre modalités d'étendre les métaphores de l'arithmétique. Le patrimoine mathématique doit être pris pour une composante essentielle de toute approche visant les mécanismes cognitifs à l'origine des idées mathématiques. Il s'en suit que l'approche cognitiviste de l'origine des mathématiques inaugurée par Lakoff et Nunez reste une théorie à accomplir, par l'investissement des concepts développés au sein de la didactique des mathématiques et de l'histoire des mathématiques.

IV. CONCLUSION

En guise de conclusion, nous souhaitons rappeler l'aspect doublement métaphorique de la technique dite « technique de la clé décimale », que nous avons signalée ci-haut, par :

- l'effectuation de la multiplication par l'intermédiaire de la soustraction et de l'addition et
- le transport de la valeur d'une position décimale à une autre à savoir la valeur des unités de la somme qui devient la valeur des dizaines du produit.

L'interférence entre multiplication et addition que Lakoff et Nunez considèrent comme une extension de l'une des métaphores ancrées de l'arithmétique montre que l'analyse cognitive des mécanismes métaphoriques des algorithmes ne doit pas perdre de vue la diversité des techniques utilisées. Probablement, il y a autant de modalités d'extension des métaphores de l'arithmétique que de techniques utilisées dans les différentes traditions mathématiques.

L'étude de cette hypothèse est, selon notre approche, envisageable dans une optique qui part de l'arithmétique et des mécanismes métaphoriques des algorithmes (approche arithmético-sémantique) qui considère ces algorithmes avec leurs techniques, et la théorie cognitiviste comme points d'appui théoriques et empiriques. Il est également à signaler que, dans un intervalle de métaphorisation, nous avons affaire à un échange qui s'effectue entre des positions et non pas entre des nombres (Mahnane, 2023).

La caisse de compensation, soit le nombre occupant la position n dans un intervalle de métaphorisation, fournit une unité ayant la valeur de 1 multiplié par 10^{n-1} . Ainsi, le chiffre 5 situé dans la quatrième position du nombre 5107 est égal à $5 \times 10^{4-1}$.

Comme l'a remarqué Lakoff et Nunez, le système décimal de position fonctionne en manipulant des chiffres lors de l'effectuation d'une opération de l'arithmétique. La soustraction par emprunt établit un rapport d'échange (horizontal) entre au moins deux positions dans un intervalle de métaphorisation. L'unité empruntée ne peut pas être appréhendée comme une valeur occupant une position dans la hiérarchie positionnelle du nombre, mais comme une dimension imaginaire d'une valeur. Cette conception pourrait constituer un fondement pour l'introduction du concept de complexité dans notre approche des mécanismes métaphoriques.

REFERENCES

- Baharti Krsna Tirtha, Swami (1965). *Vedic Mathematics, Or Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas* (for One-line Answers to All Mathematical Problems). Hindu Vishvavidyalaya Sanskrit Publication Board, Banaras Hindu University.
- Frege, G. (1969). *Les Fondements de l'Arithmétique*. Trad. et introduction de Claude Imbert. Ed. Seuil. Coll. L'ordre philosophique.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press.
- Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.
- Mahnane, I. (2023). Métaphore et soustraction. In Achour, S., Ben Nejma, S., Dhieb, M., Ghedamsi, I., Khalloufi, F., & Kouki, R. (Eds.). *Actes du 13^{ème} Colloque de Didactique des Mathématiques (ATDM 2023)*, pp. 63-72. Éditions ATDM. ISBN 978-9938-78-716-0
- Núñez, R. (2009). Numbers and Arithmetic: Neither Hard-wired nor Out There. *Biological Theory*, 4(1), 68-83.
- Wittgenstein, L. (1983). *Remarques sur les Fondements des Mathématiques*. Trad. Marie-Anne Lescourret. Ed Gallimard.

2026 - Éditions ATDM : Tunis
Copyright © ATDM

ISBN 978-9909-01-563-6

ISBN 978-9909-01-563-6

